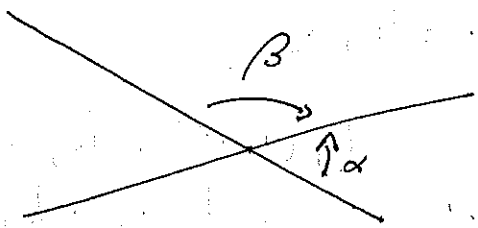
# TEMA 6 : PROBLEMAS MÉTRICOS :

## I : Ángulo de dos rectas :

- Si las rectas son coincidentes o paralelas, el ángulo que forman es de cero grados.

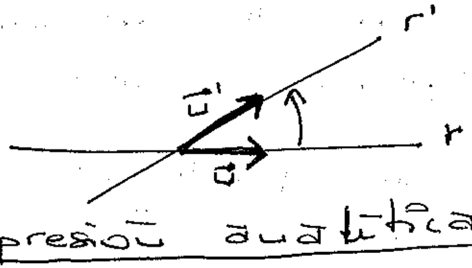
- Si las rectas son secantes, al cortarse en un punto definen ángulos iguales dos a dos por ser opuestos por el vértice ( $\alpha$ y $\beta$ son suplementarios ).




► Expresión vectorial :

Se llama ángulo formado por dos rectas secantes al menor de los ángulos que determinan dichas rectas y coincide con el ángulo que forman sus vectores directores

$$\cos(\widehat{r,r'}) = |\cos(\vec{u},\vec{u}')| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{u}'|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}'|}.$$




► Expresión analítica :

Sea $r:\ Ax+By+C=0 \Rightarrow \vec{n}=(A,B) \Rightarrow \vec{u}=(-B,A)$

$r':\ A'x+B'y+C'=0 \Rightarrow \vec{n}'=(A',B') \Rightarrow \vec{u}'=(-B',A')$

$$\cos(\widehat{r,r'}) = |\cos(\vec{u},\vec{u}')| = \frac{|AA'+BB'|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

► ¿ Cómo caracterizar la perpendicularidad de rectas ?

$$r \perp r' \iff u \perp u' \iff AA'+BB'=0.$$

Ejemplo:

1. Halla el ángulo que forman las rectas $r: 2x+3y-5=0$ y $r': x-y+7=0$.

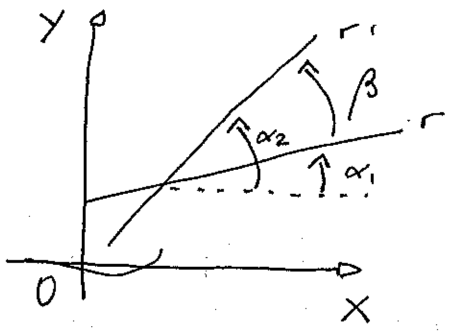
$$\cos(\widehat{r,r'}) = \frac{|2\cdot 1+3(-1)|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = 0.1961$$

$$(\widehat{r,r'}) = \arccos 0{,}1961 = 78^\circ 41' 24''.$$

En forma explícita,

$r: y = mx+n \Rightarrow m = \operatorname{tg}\alpha_1$

$r': y = m'x+n' \Rightarrow m' = \operatorname{tg}\alpha_2$




$$\operatorname{tg}(\widehat{r,r'}) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{m'-m}{1+mm'}.$$

—— o ——

$$r \perp r' \iff 1+m\cdot m' = 0 \Rightarrow \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

puesto que la tangente de 90° no existe, el denominador de la expresión anterior será nulo.

## II.- Distancia entre dos puntos.-

- Expresión vectorial

Dados dos puntos, A y B, del plano, se llama distancia de A a B al módulo del vector $\vec{AB}$.

$$d(A,B) = |\vec{AB}|$$

- Expresión analítica.-

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ siendo $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$.

## Propiedades de la distancia.-

1. $d(A,B) = 0 \iff A = B$.
2. $d(A,B) = d(B,A)$.
3. $d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$.

**Ejemplos:**

1. Calcula la distancia entre los puntos $A(5,4)$ y $B(2,8)$.

Solución: $d(A,B) = \sqrt{(2-5)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

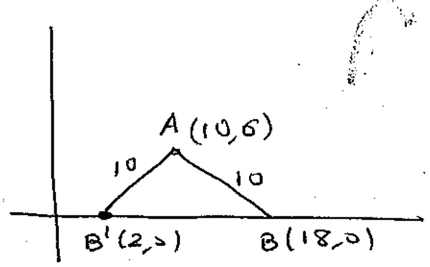
2. La distancia del punto $A(10,6)$ a otro $B$ del eje de abscisas es 10. Halla las coordenadas de $B$.

Solución: $B$ pertenece al eje $Y \Rightarrow B = (x,0)$, entonces:

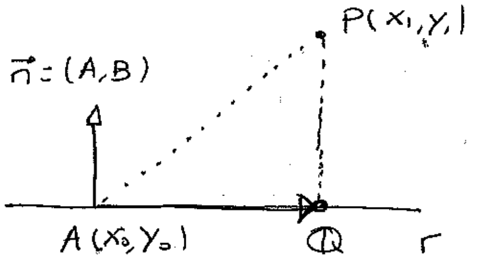
$$d(A,B) = +\sqrt{(10-x)^2 + 6^2} = 10 \Rightarrow (10-x)^2 = 64$$

$$\Rightarrow 10 - x = \pm 8 \Rightarrow x = 18 \text{ ó } x = 2.$$

Las soluciones son $B(18,0)$ y $B'(2,0)$.




## III.- Distancia de un punto a una recta.-




$d(P,r) = |\overrightarrow{QP}|$ siendo $Q$ el punto de corte de la recta $r$ con la perpendicular a $r$ que pasa por $P$.

**Expresión vectorial.-**

$$d(P,r) = |\overrightarrow{QP}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

- **Expresión analítica:**

Sea $r: Ax+By+C=0$, $A(x_0, y_0)$ un punto cualquiera y $P(x_1, y_1)$ el punto dado, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(A,B)\\ \overrightarrow{AP}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0).\end{array}\right.$$

luego $\boxed{d(P,r)} = \dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} =$

$$= \frac{|Ax_1+By_1-(Ax_0+By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \boxed{\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Ejemplo: Calcula la distancia del punto $P(2,-1)$ a la recta $r$ de ecuación $3x+4y=0$.

Solución:

$$d(P,r) = \frac{|3\cdot 2+4(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5}.$$

IV - Distancia entre dos rectas:

- Si las rectas son secantes o coincidentes, la distancia es nula.

- Si las rectas son paralelas, la distancia entre ambas es igual a la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta.

Sea $r: Ax+By+C=0$ y $r': Ax+By+C'=0$ dos rectas distintas y paralelas $(C\neq C')$.
Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de $r$, entonces:

$$d(r,r') = d(P,r') = \frac{|Ax_0+By_0+C'|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ya que $Ax_0+By_0=-C$.

Ejemplo:

1. Halla la distancia entre las rectas $r: 2x+3y-5=0$ y $r': 2x+3y+7=0$.

$$d = \frac{|7+5|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}.$$

~~2. Halla~~

## V - Lugares Geométricos -

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad.

### 1. Mediatriz de un segmento:

Es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia (equidistan) de los extremos. Es decir:

$$\boxed{d(P,A) = d(P,B)}$$

- **Ecuación de la mediatriz:**

Sea el segmento de extremos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la mediatriz, entonces:

$$d(P,A) = d(P,B) \iff \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Ejemplo: Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2,5)$ y $B(4,-7)$.

Solución:

$$d(P,A) = d(P,B) \iff \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}$$

$$\iff x^2-4x+4+y^2-10y+25 = x^2-8x+16+y^2+14y+49$$

$$\iff x-6y-9=0$$

2. Bisectrices de los ángulos determinados por dos rectas:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia (equidistan) de las rectas que forman el ángulo.

$$d(P,r) = d(P,r')$$

► Ecuaciones de las bisectrices:

$r: Ax+By+C=0 \quad ; \quad r': A'x+B'y+C'=0.$

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A'x+B'y+C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}}, \text{ se tiene :}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} &= \frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \quad (1) \\ \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} &= -\left(\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\right) \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Bisectrices de los ángulos que forman dos rectas secantes.

Ejemplo: Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r: 3x-4y+5=0$ y $r': 6x+8y+1=0$.

$$\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6x+8y+1|}{\sqrt{36+64}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: -16y+9=0 \\ b_2: 12x+11=0. \end{cases}$$

VI - Área del triángulo:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\,|\vec{AB'}\cdot\vec{AC}|.}$$

$A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ $C(x_2,y_2)$ Sea $\vec{AB'}$ un vector ortogonal a $\vec{AB}$ y de igual módulo, es decir:

$$\vec{AB} \perp \vec{AB'} \quad y \quad |\vec{AB}| = |\vec{AB'}|.$$

# Relación I – Problemas métricos –

1 – Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(3,5)$, $B(8,-3)$ ; b) $A(\sqrt{5},\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3},-\sqrt{5})$.

2 – ¿Para qué valor de $x$ la distancia entre los puntos $A(5,-2)$ y $B(7,x)$ es igual a 4 unidades?.

3 – Calcula el ángulo que forman las rectas $r$ y $s$:

a) $r: (x,y) = (3,-1) + (2,5)t$ ; $s: (x,y) = (1,0) + (-2,1)t$.

b) $r: 3x + 4y - 12 = 0$ ; $s: 6x + 8y + 1 = 0$.

c) $r: 2x + 3y - 5 = 0$ ; $s: 3x - 2y + 10 = 0$.

4 – Sean las rectas : $r \equiv 3x + 2y - 8 = 0$ , $s \equiv kx - y + 5 = 0$.
Determinar $k$ para que formen un ángulo de $45°$.

5 – Calcula la ecuación de la recta paralela y la recta perpendicular a la que se da por el punto que se indica:

a) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{2}$ por $P(1,3)$ ; b) $y = 8x - 1$ por $P(-3,2)$.

6 – Un punto es equidistante de $A(6,10)$ y $B(-4,8)$. Su distancia al eje OX es doble que al eje OY. Halla las coordenadas de ese punto.

7 – Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de $5x + 2y + 4 = 0$ ; $3x - 4y + 18 = 0$ y forman ángulos de $45°$ con la primera

8 – Dado el triángulo $A(-1,-1)$, $B(7,5)$, $C(2,7)$, calcular las ecuaciones de las tres alturas y determinar el ortocentro del triángulo.

9 – Determinar el valor de $a$ para que las rectas $ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$ y $3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$ sean:

a) paralelas ; b) perpendiculares

10 – Halla la mediatriz del segmento de extremos los puntos $A(1,3)$ y $B(5,-1)$.

11.- Calcula las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas $3x-4y+1=0$; $5x+12y-7=0$.

12.- Las rectas de ecuaciones $ax-y=4$; $x+b=y$, son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos distantes 5 unidades. Hallar a y b.

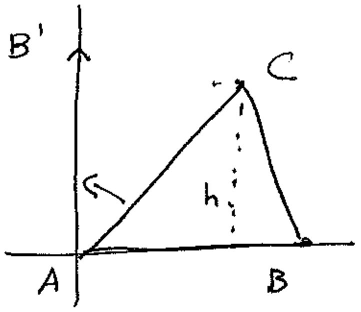
13.- Halla las coordenadas del punto simétrico del origen respecto de la recta $4x+3y=50$. $P_1(16,12)$

14.- La recta $4x-3y=12$ es mediatriz del segmento AB. Sabiendo que las coordenadas de A son $(1,0)$, halla las de B. $\left(\frac{89}{25}, \frac{48}{25}\right)$

15.- Halla un punto de la recta $2x-y+5=0$ que equidiste de $A(3,5)$ y $B(2,1)$. $P\left(\cancel{\frac{54}{25}}\right.$ $P\left(\frac{11}{18}, \frac{34}{9}\right)$

16.- Calcula las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $A(1,-2)$ disten 2 unidades del punto $B(3,1)$.

— o —




$$S = \frac{1}{2}\, b \cdot h = \frac{1}{2}\, |\vec{AB}| \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2}\, |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB'}})$$

$$= \frac{1}{2}\, |\vec{AB'}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB'}})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB'} \cdot \vec{AC}|.$$

Ejemplo: Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(-1,4)$, $C(2,0)$.

Solu: $\vec{AB} = (-2,2)$ entonces $\vec{AB'} = (2,2)$, como $\vec{AC} = (1,-2)$

$$S = \frac{1}{2}\, |\vec{AB'} \cdot \vec{AC}| = \frac{1}{2}\, |2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$