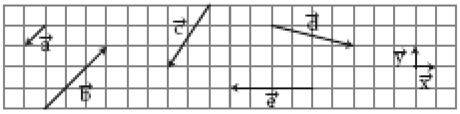
Tema 5. Vectores

Índice:

- Los vectores y sus operaciones.
- Coordenadas de un vector.
- Operaciones con coordenadas.
- Producto escalar de dos vectores.

Ejercicio 1:

Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ con respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.



$\vec{a}(-1, -1)$ $\quad$ $\vec{b}(3, 3)$ $\quad$ $\vec{c}(-2, -3)$ $\quad$ $\vec{d}(4, -1)$ $\quad$ $\vec{e}(-4, 0)$

Ejercicio 2:

Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $(3, -5)$ y $(-2, 1)$, obtén las coordenadas de:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ $\quad$ **b)** $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$ $\quad$ **c)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}\,(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{11}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}\,(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}\left[(3, -5) + (-2, 1)\right] - \frac{2}{3}\left[(3, -5) - (-2, 1)\right] = \frac{1}{2}\,(1, -4) - \frac{2}{3}\,(5, -6) =$

$= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

Ejercicio 3:

Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

Solución: (- 20,22)

Ejercicio 4:

Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, siendo $\vec{a}(1, -7)$ y $\vec{u}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

Ejercicio 5:

Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Solución: $\mathrm{m} = -\frac{5}{4}, n = \frac{-15}{4}$

Ejercicio 6:

Expresa el vector $\vec{a}(1, 5)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

Solución:

$$\vec{a} = -\frac{41}{13}\vec{b} - \frac{36}{13}\vec{c}$$

Ejercicio 7:

¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

c) $\vec{u}(5, -4)$, $\vec{v}(5, 4)$

Solución: a) No b) No c) Si

Ejercicio 8:

Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **y** $\vec{w}(5, 2)$, **calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

Solución: a) 22 b) 29 c) (-15,-6) d) (20,30)

Ejercicio 9:

Calcula x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7.**

Solución: $x = \frac{17}{3}$

Ejercicio 10:

Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ **calcula** k **de modo que:**

a) $\vec{u}$ **sea ortogonal a** $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ **sea igual a** $\sqrt{34}$.

Solución: a) k = - 10 b) ± 3

Ejercicio 11:

Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, **ortogonal a** $\vec{u}(3, 4)$ **y que mida el doble que** $\vec{u}$.

Solución: (-8,6) ó (8,-6)

Ejercicio 12:

Dados $\vec{a}(2, 1)$ **y** $\vec{b}(6, 2)$, **halla un vector** $\vec{v}$ **tal que** $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ **y** $\vec{v} \perp \vec{b}$.

Solución:

$$\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Ejercicio 13:

Siendo $\vec{u}(5, -b)$ **y** $\vec{v}(a, 2)$, **halla** a **y** b, **sabiendo que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **son ortogonales y que** $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

Solución:

$$\text{Si } a = 3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Si } a = -3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{-15}{2}$$

Ejercicio 14:

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

Solución: a) 112 º b) 90º c) 135º

Ejercicio 15:

En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono de vértices A, B, C, D, E, F.

Calcula los productos:

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$ d) $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

Solución: a) 2 b) – 2 c) 4 d) – 4

Ejercicio 16:

Dado el vector $\vec{u}(6,-8)$, determina:

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

Solución: a) $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ y $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ b) (8,6) y (- 8, - 6) c) $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ y $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio 17:

Dados los vectores $\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{b}=-3\vec{u}+k\vec{v}$, siendo $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(-3,0)$, halla k de modo que $(\vec{a}+\vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a}-\vec{b})$.

Solución: $k_1=-\frac{4}{3}, k_2=-\frac{8}{3}$

Ejercicio 18:

Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x}=k\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{y}=k\vec{a}-\vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(1,-3)$ y $\vec{b}(2,5)$.

Solución: $k=\pm\sqrt{\frac{29}{10}}$

Ejercicio 19:

De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Solución: 7

Ejercicio 20:

Si $|\vec{u}|=3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=-11$, halla $|\vec{v}|$.

Solución: $\sqrt{20}$

Ejercicio 21:

Sabiendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=5$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$, halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.

Solución: $\sqrt{34}$ en ambos casos

Ejercicio 22:

Si $|\vec{u}|=7$, $|\vec{v}|=5$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=10$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Solución: 68º

Ejercicio 23:

Se sabe que $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$ y $\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios.

¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

Solución: 120º

Ejercicio 24:

Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7,1)$ y $\vec{b}(1,x)$ formen un ángulo de 45°.

Solución: $\frac{4}{3}$ y $-\frac{3}{4}$

Ejercicio 25:

Calcula x para que $\vec{a}(3, x)$ y $\vec{b}(5, 2)$ formen un ángulo de 60°.

Solución: x_1= -2`36 y $x_2$= 20`82

Ejercicio 26:

Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

Solución: $x_1 = (4`46, 0`27)$ y $x_2 = (-2`46, 3`73)$

Ejercicio 27:

Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}(-1, -2)$ un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\,|\vec{b}|$.

Solución:

$$\vec{a}\left(\frac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ o } \vec{a} = \left(\frac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejercicio 28:

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Solución: $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

Ejercicio 29:

Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

a) Número

b) Vector

c) Número

d) Número

Ejercicio 30:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

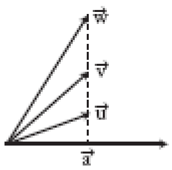
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

Solución: a) 0º b) 90º c) 180º d) 60º

Ejercicio 31:

¿Es cierto que $\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$? Justifica la respuesta.



$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$. Observa las proyecciones de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$.

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$)

$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{a}$)

$\vec{a} \cdot \vec{w} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$)

Como las proyecciones de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$ son iguales, entonces se verifica que:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$$

Ejercicio 32:

Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

Ten en cuenta que $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| \overset{(*)}{\le} |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

(*) Como para cualquier ángulo α se da que $-1 \le \cos\alpha \le 1 \;\rightarrow\; |\cos\alpha| \le 1$.